Rangkuman Konsep Analisis Kausalitas

Wahyu Widhiarso
Fakultas Psikologi UGM

13 Maret 2011

1 Komponen Persamaan

Komponen dalam Persamaan Komponen-komponen di dalam persamaan analisis kausal terdiri dari:

- *X*=*x* (x=1,2,...J) adalah perlakuan yang diberikan. Dalam hal ini
- *Y(u)* adalah hasil pengukuran atau observasi terhadap keluaran (*outcome*) dampak perlakuan.
- *U*=*u* adalah unit yang dilibatkan dalam penelitian atau diberi perlakuan. Dalam tulisan ini unit yang dilibatkan dinamakan dengan subjek.
- *Z*=*z* adalah kovariat, yaitu variabel yang turut mempengaruhi keluaran dan dikontrol secara statistik.

Keluaran Murni Untuk setiap subjek u yang diberikan perlakuan x maka keluaran murni (*true outcome*) didapatkan dari nilai harapan u didasarkan dari jenis perlakuan dan subjek yang diberikan perlakuan.

$$\tau_x(u) \equiv E(Y|X{=}x, U{=}u), \qquad x = 0, 1, \ldots, J, \tag{1}$$

Sebagai contoh, untuk desain eksperiman dua kelompok yaitu kelompok perlakuan (x) dan kelompok kontrol (x'), maka keluaran murni masing-masing kelompok didapatkan dari dua persamaan yaitu:

Kelompok perlakuan : $\tau_x(u) \equiv E(Y|X{=}x, U{=}u)$
Kelompok kontrol : $\tau_x'(u) \equiv E(Y|X{=}x', U{=}u)$

Efek Kausal Individual Efek kausal individual adalah selisih antara perlakuan x dengan *x'* untuk subjek yang sama. Misalnya x adalah keluaran murni hasil pemberian terapi sedangkan *x'* adalah keluaran murni tanpa terapi untuk subjek u.

$$\delta_{xx'}(u) \equiv \tau_x(u) - \tau_{x'}(u) \tag{2}$$

Probabilitas Perlakuan Murni Probabilitas perlakuan x untuk individu u dinyatakan dengan probabillitas pemberian perlakuan $X{=}x$ bersyarat pada subjek $U{=}u$.

$$P(X{=}x|U{=}u) \tag{3}$$

Probabilitas Bersyarat/Kondisional Probabilitas bersyarat efek perlakuan untuk unit $U{=}u$ pada perlakuan $X{=}x$ dinyatakan dengan probabilitas pemberian perlakuan bersyarat pada subjek (u) dikali dengan probabilitas subjek untuk dilibatkan dalam penelitian dibagi dengan probabilitas untuk mendapatkan perlakuan x.

$$P(U{=}u|X{=}x) = \frac{P(X{=}x|U{=}u) \cdot P(U{=}u)}{P(X{=}x)} \tag{4}$$

2 Konsep Umum

Efek Perlakuan Umum Efek perlakuan secara umum (*prima facie effect*) dinyatakan dengan selisih nilai harapan keluaran Y dari perlakuan x dan perlakuan x'

$$PFE_{xx'} \;\equiv\; E(Y|X{=}x) - E(Y|X{=}x') \tag{5}$$

Di dalam PFE terkandung rerata efek perlakuan secara umum (ACE) serta bias nilai awal (*baseline*) dan bias efek.

$$PFE_{xx'} = ACE_{xx'} + \textit{baseline bias}_{xx'} + \textit{effect bias}_{xx'}$$

Penjabaran selengkapnya dijelaskan pada bagian bias.

Efek Bersyarat/Kondisional Efek bersyarat (*conditional prima facie effects*) adalah efek perlakuan yang didasarkan pada nilai kovarian (Z=z). Didapatkan dari selisih antara nilai harapan keluaran (Y) oleh perlakuan (X=x) dan kovarian (Z=z).

$$PFE_{xx';Z=z} \;\equiv\; E(Y|X{=}x, Z{=}z) - E(Y|X{=}x', Z{=}z) \tag{6}$$

Di dalam PFE bersyarat terkandung rerata efek perlakuan bersyarat serta bias nilai awal (*baseline*) dan bias efek bersyarat.

$$PFE_{xx';Z=z} = CCE_{xx';Z=z} + \textit{baseline bias}_{xx';Z=z} + \textit{effect bias}_{xx';Z=z}$$

Penjabaran selengkapnya dijelaskan pada bagian bias.

Rerata Efek Kausal Rerata efek kausal (*average causal effects/ACE*) perlakuan x dibandingkan dengan x' pada nilai harapan Y didefinisikan dengan $ACE_{xx'} \equiv E(\delta_{xx'})$ (persamaan 2) dapat dihitung dengan persamaan berikut.

$$ACE_{xx'} \equiv E(\delta_{xx'}) = \textstyle\sum_u \delta_{xx'}(u) \cdot P(U{=}u), \qquad x \neq x', \quad x, x' = 0, 1, \ldots, J. \tag{7}$$

Dengan mengetahui $\delta_{xx'} \equiv \tau_x - \tau_{x'}$ maka rerata efek kausal murni didefinisikan dengan selisih nilai harapan keluaran murni pada perlakuan x dan x.

$$ACE_{xx'} = E(\tau_x) - E(\tau_{x'}) \tag{8}$$

Efek Kausal Bersyarat Efek kausal bersyarat *conditional causal effects* pada perlakuan X=x dibandingkan dengan perlakuan X=x' pada keluaran Y berdasar nilai z pada kovariat Z adalah nilai harapan efek kausal individual bersyarat pada Z=z. Berdasar asumsi di muka maka efek kausal bersyarat (CCE) dapat dihitung dengan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} CCE_{xx'\,;\,Z=z} &\equiv E(\delta_{xx'}|Z{=}z) = \textstyle\sum_u \delta_{xx'}(u) \cdot P(U{=}u|Z{=}z) \\ &x \neq x', \quad x, x' = 0, 1, \ldots, J. \end{aligned} \tag{9}$$

Dengan mengetahui $\delta_{xx'} \equiv \tau_x - \tau_{x'}$ maka efek kausal perlakuan bersyarat x berdasarkan x' yang dikondisikan oleh kovariat Z=z didapatkan dari selisih nilai harapan keluaran murni pada perlakuan τ_x dengan perlakuan τ'_x yang dikondisikan oleh kovariat Z=z.

$$CCE_{xx';Z=z} = E(\tau_x|Z{=}z) - E(\tau_{x'}|Z{=}z) \tag{10}$$

dimana E($\tau_x|Z$=z) adalah jumlah keluaran murni τ_x pada subjek (u) yang dikalikan dengan probabilitas subjek u yang didasarkan pada nilai kovarian Z=z

$$E(\tau_x|Z{=}z) = \textstyle\sum_u \tau_x(u) \cdot P(U{=}u|Z{=}z), \qquad x = 0, 1, \ldots, J, \tag{11}$$

Nilai Harapan Variabel Keluaran Murni Nilai harapan variabel keluaran murni didapatkan dari perkalian antara jumlah keluaran murni τ_x pada subjek (u) dikali probabilitas subjek U=u.

$$E(\tau_x) = \textstyle\sum_u \tau_x(u) \cdot P(U{=}u), \qquad x = 0, 1, \ldots, J \tag{12}$$

Nilai Harapan Bersyarat Variabel Keluaran Murni Didapatkan dari perkalian antara jumlah keluaran murni (τ_x) pada subjek dikali dengan probabilitas subjek tersebut untuk diberi perlakuan bersyarat dari nilai kovariatnya. Jadi, keluaran murni (τ_x) dari perlakuan x nilainya berbeda-beda untuk setiap subjek (u). Di sisi lain setiap subjek memiliki nilai kovariat yang berbeda-beda, misalnya Ali (U=Ali) memiliki kovariat sebesar 1 (Z=1) sementara Ani (U=Ani) memiliki kovariat sebesar 4 (Z=4). Dengan menggabungkannya maka nilai harapan yang bersyarat pada kovariat didefinisikan dalam bentuk persamaan berikut.

$$E(\tau_x|Z{=}z) = \textstyle\sum_u \tau_x(u) \cdot P(U{=}u|Z{=}z), \qquad x = 0, 1, \ldots, J \tag{13}$$

Nilai Harapan Variabel Keluaran Bersyarat Didapatkan dari perkalian antara jumlah keluaran τ_x pada subjek (u) dikali probabilitas subjek U dengan jenis perlakuan X yang diberikan (U=u—X=x).

$$E(Y|X{=}x) = \textstyle\sum_u \tau_x(u) \cdot P(U{=}u|X{=}x), \qquad x = 0, 1, \ldots, J \tag{14}$$

Perbedaan dengan persamaan sebelumnya adalah tidak ada kovariat (Z) yang dilibatkan sehingga pengkondisiannya hanya berdasarkan jenis perlakuan saja.

Nilai Harapan Variabel Keluaran bersyarat pada Perlakuan dan Kovariat Sama seperti persamaan (16) dengan penambahan pengkodisian kovariat Z=z

$$E(Y|Z{=}z, X{=}x) = \textstyle\sum_u \tau_x(u) \cdot P(U{=}u|X{=}x, Z{=}z) \tag{15}$$

3 Konsep Bias

Bias Efek Kausal Yang dimaksud dengan bias di sini adalah adanya selisih nilai harapan yang antar dua kondisi perlakuan yang seharusnya secara teoritik memiliki kesamaan. Di dalam bias efek kausal (PFE) terkandung rerata efek perlakuan secara umum (ACE) serta bias nilai awal (*baseline*) dan bias efek.ACE seperti yang telah dijelaskan sebelumnya adalah nilai harapan efek perlakuan antara perlakuan x dan x'.

$$PFE_{xx'} = ACE_{xx'} + \textit{baseline bias}_{xx'} + \textit{effect bias}_{xx'} \tag{16}$$

Bias Kondisi Awal. Bias kondisi awal (*baseline bias*) adalah selisih dari nilai harapan nilai keluaran murni tanpa perlakuan (x') baik pada kelompok perlakuan (x) dan kelompok kontrol (x').

$$\textit{baseline bias}_{xx'} \equiv E(\tau_{x'}|X{=}x) - E(\tau_{x'}|X{=}x') \tag{17}$$

Bias Efek. Bias efek kausal adalah selisih nilai harapan efek kausal individual akibat perlakuan x ($\delta_{xx'}|X{=}x$) dengan nilai harapan murni perlakuan x.

$$\textit{effect bias}_{xx'} \equiv E(\delta_{xx'}|X{=}x) - ACE_{xx'} \tag{18}$$

Dari pengertian di atas dapat disimpulkan bahwa efek perlakuan secara umum (PFE) memuat tiga komponen bias, yaitu (a) bias yang dikarenakan efek perlakuan yang memberikan kadar pengaruh yang sama, (b) bias yang dikarenakan adanya perbedaan kondisi awal sebelum perlakuan diberikan dan (c) bias yang dikarenakan keunikan individu.

Bias Efek Bersyarat Di dalam efek kausal bersyarat (PFE bersyarat pada Z=z) terkandung rerata efek perlakuan bersyarat serta bias nilai awal (*baseline*) dan bias efek bersyarat.

$$PFE_{xx';Z=z} = CCE_{xx';Z=z} + \textit{baseline bias}_{xx';Z=z} + \textit{effect bias}_{xx';Z=z} \tag{19}$$

Bias Kondisi Awal Bersyarat Bias nilai awal bersyarat (*baseline*) adalah selisih dari nilai harapan nilai keluaran murni antar perlakuan yang masing-masing didasarkan pada nilai kovariat $Z{=}z$.

$$\textit{baseline bias}_{xx'\,;\,Z=z} \equiv E(\tau_{x'}|X{=}x, Z{=}z) - E(\tau_{x'}|X{=}x', Z{=}z) \qquad (20)$$

Bias Efek Bersyarat Bias efek bersyarat didapatkan dari selisih efek kausal individual terkondisi $(\delta_{xx'}|X{=}x, Z{=}z)$ dengan efek kausal bersyarat (CCE).

$$\textit{effect bias}_{xx'\,;\,Z=z} \equiv E(\delta_{xx'}|X{=}x, Z{=}z) - CCE_{xx'\,;\,Z=z} \qquad (21)$$

Rerata Efek Bersyarat oleh Perlakuan Rerata efek bersyarat oleh perlakuan x adalah rerata efek kausal perlakuan x yang dibandingkan dengan x' didasarkan pada perlakuan x^*.

$$\begin{aligned} CCE_{xx'\,;\,X=x^*} \equiv E(\delta_{xx'}|X{=}x^*) \quad &= \textstyle\sum_u \delta_{xx'}(u) \cdot P(U{=}u|X{=}x^*) \\ &x \neq x', \quad x^*, x, x' = 0, 1, \ldots, J. \end{aligned} \qquad (22)$$

3.1 Ketidakbiasan

Efek kausal (PFE) yang didapatlan dari perbandingan perlakuan x dan x dikatakan tidak bias jika nilainya sama dengan nilai rerata efek kausalnya. Pada kondisi ini bias kondisi awal dan bias efeknya adalah nol.

$$PFE_{xx'} = ACE_{xx'}.$$

Sama halnya dengan persamaan tersebut, efek kausal bersyarat dikatakan tidak bias ketika nilai PFE dan efek kausal bersyarat (CCE) adalah sama.

$$PFE_{xx'\,;\,Z=z} = CCE_{xx'\,;\,Z=z}.$$

Untuk setiap nilai kovariat z secara umum persamaan di atas dijabarkan menjadi persamaan berikut.

$$PFE_{xx'\,;\,Z} = CCE_{xx'\,;\,Z}. \qquad (23)$$

Ketidakbiasan Regresi Perlakuan Nilai harapan bersyarat $E(Y|X{=}x)$ pada variabel keluaran Y pada perlakuan x dikatakan tidak bias ketika nilainya sama dengan nilai harapan untuk keluaran murni $E(\tau_x)$. Pada kasus ini regresi variabel Y dengan prediktor $X{=}x$ merepresentasikan efek murni perlakuan diwujudkan dalam persamaan:

$$E(Y|X{=}x) = E(\tau_x). \qquad (24)$$

dimana seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa :

$$\tau_x(u) \equiv E(Y|X{=}x, U{=}u), \qquad x = 0, 1, \ldots, J,$$

Regresi perlakuan $E(Y|X)$ dikatakan tidak bias jika persamaan di atas terjadi pada $x \in \{0, 1, \ldots, J\}$.

Ketidakbiasan Regresi Kovariat-Perlakuan Nilai harapan bersyarat $E(Y|X{=}x, Z{=}z)$ untuk variabel Y yang dikarenakan perlakuan x dengan kovariat z dikatakan tidak bias ketika:

$$E(Y|X{=}x, Z{=}z) = E(\tau_x|Z{=}z). \tag{25}$$

Jika X dan Z adalah diskrit, maka regresi $E_{X=x}(Y|Z)$ untuk perlakuan Y pada kovariat Z dan perlakuan x dikatakan tidak bias jika persamaan di atas berlaku pada semua pasangan X dan Z.

Independensi Stokastik antara *X* dan *U* Perlakuan X dan subjek U dikatakan memiliki independensi stokastik, yang disimbolkan dengan $U \perp X$, jika:

$$P(X{=}x|U) = P(X{=}x) \qquad \text{untuk setiap } x = 0, 1, \ldots, J. \tag{26}$$

Artinya, probabilitas pemberian perlakuan $X{=}x$ tidak tergantung pada kondisi subjek (U).

Perlakuan X dan subjek U dikatakan memiliki independensi stokastik bersyarat, yang disimbolkan dengan $U \perp X|Z$ jika:

$$P(X{=}x|U, Z) = P(X{=}x|Z) \qquad \text{untuk setiap } x = 0, 1, \ldots, J. \tag{27}$$

Artinya, probabilitas pemberian perlakuan $X{=}x$ tidak tergantung pada kondisi subjek (U), tetapi tetap bersyarat pada nilai kovariatnya (Z).

Homogenitas Perlakuan Regresi $E(Y|X, U)$ dikatakan homogen, yang disimbolkan dengan $Y \vdash U|X$, terjadi jika:

$$E(Y|X, U) = E(Y|X). \tag{28}$$

Regresi Y dengan prediktor variabel perlakuan (X), kovariat (Z), dan dan subjek (U) yang diwujudkan dengan persamaan $E(Y|X, Z, U)$ dikatakan homogen bersyarat jika pada Z (disimbolkan dengan $Y \vdash U|X, Z$) jika:

$$E(Y|X, Z, U) = E(Y|X, Z). \tag{29}$$

Independensi Stokastik X dan τ Dengen mengetahui bahwa $\tau \equiv (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_J)$ adalah vektor keluaran murni, maka:

- X dan τ bersifat independen stokastik (disimbolkan dengan $\tau \perp X$) ketika:

$$P(X{=}x|\tau) = P(X{=}x) \qquad \text{untuk tiap } x = 0, 1, \ldots, J. \tag{30}$$

- X dan τ bersifat independen stokastik bersyarat (disimbolkan dengan $\tau \perp X|Z$) ketika:

$$P(X{=}x|Z, \tau) = P(X{=}x|Z) \qquad \text{untuk tiap } x = 0, 1, \ldots, J. \tag{31}$$

Independen Regresif X dan τ Dengan mengetahui bahwa $\tau \equiv (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_J)$ menunjukkan vektor variabel keluaran murni, maka:

- Keluaran murni dikatakan independen regresif dari perlakuan, jika:

$$E(\tau|X) = E(\tau)$$

- Keluaran murni dikatakan independen regresif bersyarat dari perlakuan, jika:

$$E(\tau|X, Z) = E(\tau|Z). \qquad (32)$$

Tidak adanya Gangguan/Unconfoundedness Dengan asumsi yang telah dijelaskan di depan maka regresi perlakuan $E(Y|X)$ dikatakan tidak terganggu oleh varians yang tidak relevan (*unconfounded*) jika memenuhi salah satu kriteria di bawah ini (untuk setiap nilai $x = 0, 1, \ldots, J$ dari perlakuan X).

- $P(X{=}x|U) = P(X{=}x)$
  Di sini terlihat bahwa probabilitas pemberian perlakuan pada subjek (U) tidak terpengaruh oleh siapa atau apa karakteristik U.
- $E_{X=x}(Y|U) = E_{X=x}(Y)$
  Nilai harapan (yang biasanya diestimasi dengan rerata) menunjukkan bahwa nilai harapan keluaran hasil perlakuan tidak bersyarat pada subjeknya.

Gangguan Kovariat Regresi dengan prediktor perlakuan (X) dan kovariat (Z) yang dinyatakan dengan $E(Y|X, Z)$, dikatakan unconfounded jika P_Z berlaku hampir pada semua nilai z dari Z memenuhi salah satu kriteria berikut ini (untuk setiap nilai $x = 0, 1, \ldots, J$).

- $P_{Z=z}(X{=}x|U) = P_{Z=z}(X{=}x) \qquad P_{Z=z}$-a.s.
  Di sini terlihat bahwa untuk setiap nilai kovariat probabilitas pemberian perlakuan pada subjek, tidak tergantung pada karakteristik subjeknya.
- $E_{X=x,\,Z=z}(Y|U) = E_{X=x,\,Z=z}(Y) \qquad P_{X=x,\,Z=z}$-a.s.
  Konsekuensi dari probabilitas di atas maka nilai harapan efek perlakuan (Y) tidak tergantung pada karakteristik subjeknya.

4 References

Steyer, R., Partchev, I., Kroehne, U., Nagengast, B., Fiege, C. (2011). Probability and Causality I. Book Manuscript. Department of Methodology and Evaluation Research. University of Jena.

Nagengast, B., Kroehne, U., Bauer, M. Steyer, R. (2007). Causal Effects Explorer - A didactic tool for teaching the theory of individual and average causal effects [Computer software]. University of Jena, Jena, Thringen, Germany.