

Aplikasi Teori Respons Butir Melalui MPLUS

Wahyu Widhiarso
Fakultas Psikologi UGM | 2012
wahyu_psy@ugm.ac.id

1 Teori Respons Butir

Teori respons butir untuk model 2PL ditunjukkan dengan persamaan di bawah ini. D adalah faktor koreksi untuk mendekati dengan kurva normal yang nilainya 1.7. a menunjukkan daya diskriminasi aitem, b menunjukkan tingkat kesulitan aitem dan θ menunjukkan level abilitas individu.

$$P(U_i = 1) = \frac{\text{Exp}[Da_i(\theta - b_i)]}{1 + \text{Exp}[Da_i(\theta - b_i)]}$$

Persamaan di atas juga dapat disederhanakan dengan persamaan di bawah ini.

$$P(U_i = 1) = \frac{1}{1 + \text{Exp}[Da_i(b_i - \theta)]}$$

Jika menggunakan perspektif analisis butir aitem (*item factor analysis*) maka kita menggunakan persamaan di bawah ini. simbol τ (tau) menunjukkan nilai ambang butir (*threshold*), nilai λ (*lambda*) menunjukkan muatan factor (*factor loading*) dan nilai f menunjukkan skor faktor individu.

$$P_{ij}(f) = P(U_i = j | f) = \frac{1}{1 + \text{Exp}(-\tau_{ij} + \lambda_{ij}f)}$$

Program MPLUS mengaplikasikan teori respons butir dengan menggunakan pendekatan analisis faktor aitem ini.

2 Kurva Karakteristik Aitem

2.1 Penghubung Logit

- Model dengan menggunakan penghubung logit (*logit link*) dapat dipakai pada estimator kemungkinan maksimal (ML), kemungkinan maksimal kuat/robot (MLR) dan MLF.

Kategori pertama :	$P_{ij}(f) = P(U_i = j f) = \frac{1}{1 + \text{Exp}(-\tau_{ij} + \lambda_{ij}f)}$
--------------------	---

Kategori terakhir :	$P_{ij}(f) = P(U_i = j f) = 1 - \frac{1}{1 + \text{Exp}(-\tau_{ij} + \lambda_{ij}f)}$
---------------------	---

Kategori di tengah :

$$P_{ij}(f) = P(U_i = j | f) = \frac{1}{1 + \text{Exp}(-\tau_{ij} + \lambda_{ij}f)} - \frac{1}{1 + \text{Exp}(-\tau_{ij-1} + \lambda_{ij}f)}$$

2.2 Contoh Syntax MPLUS

- Ciri khas penggunaan penghubung logit adalah LINK IS LOGIT.
- Muatan faktor di buat bebas, rerata faktor=0 [F1@0] dan varians faktor=1 F1@1

```

TITLE: Analisis Teori Respons Butir MPLUS (2PL)
DATA: FILE IS lsat-mplus.dat;
VARIABLE: NAMES ARE a01-a05 freq;
          FREQWEIGHT IS freq;
          USEVARIABLE ARE a01-a05;
          CATEGORICAL ARE a01-a05;
ANALYSIS: ESTIMATOR IS ML;
          LINK IS LOGIT;
MODEL:
F1 BY a01-a05*;
     [a01$1-a05$1*];
     [F1@0]; F1@1;
OUTPUT: STAND;

```

2.3 Hasil Analisis MPLUS

MPLUS menekankan pada pendekatan analisis factor aitem.

Loadings (λ_i)		$\text{Logit}Y_{is} = \frac{1}{1 + \exp(-\tau_i + \lambda_i F_s)}$
I1	1.698	<ul style="list-style-type: none"> • Nilai lambda, menunjukkan perubahan logit Y=1 untuk tiap satu perubahan unit Theta/Faktor
I2	1.301	
I3	2.743	
I4	1.186	
I5	1.710	
Means		
F1	0.000	
Thresholds (τ_i)		<ul style="list-style-type: none"> • Nilai Logit individu ketika F atau $\theta=0$ • Analog dengan intersep pada regresi. • Untuk butir 1, ketika F=0 maka nilai individu adalah -2.592
I1\$1	-2.592	<ul style="list-style-type: none"> • Penjelasan ini menunjukkan nilai Logit yang didapatkan dari tingkat kesulitan dan daya diskriminasi aitem • $\tau_i = 1.7a_i(\theta - b_i)$ • Misalnya butir 1. Untuk nilai $\theta=0$. Maka $1.7*0.999*(0-(-1.527))= -2.592$
I2\$1	-1.968	
I3\$1	-1.746	
I4\$1	-0.960	
I5\$1	-0.589	
IRT PARAMETERIZATION IN TWO-PARAMETER LOGISTIC METRIC WHERE THE LOGIT IS 1.7*DISCRIMINATION*(THETA - DIFFICULTY)		
Item Discriminations (a_i)		<ul style="list-style-type: none"> • Slope dari ICC pada titik P=0.5 • $a_i = \lambda_i / 1.7$ • Sama dengan nilai loadings dibagi 1.7. Misalnya butir I1: $1.698/1.7=0.999$
I1	0.999	
I2	0.766	
I3	1.614	
I4	0.698	
I5	1.006	

Item Difficulties (b_i)		
I1\$1	-1.527	<ul style="list-style-type: none"> Lokasi aitem pada garis trait pada titik $P=0.5$ $b_i = \tau_i / \lambda_i$ Sama dengan threshold dibagi loadings. Misalnya butir I1: -2.592/1.698=-1.527
I2\$1	-1.512	
I3\$1	-0.637	
I4\$1	-0.809	
I5\$1	-0.345	

2.4 Perbandingan dengan Software Lain

MULTILOG

Par. a	Par. b
1.69938	-1.52373
1.30273	-1.50889
2.75147	-0.63411
1.18766	-0.80681
1.71144	-0.34289

- Loadings (λ) MPLUS = a (discrim) MULTILOG
- Threshold (τ) MPLUS = b (difficulty) MULTILOG

R Paket ltm

Par. a	Par. b
1.7000	-1.5250
1.3030	-1.5110
2.7620	-0.6360
1.1870	-0.8090
1.7120	-0.3450

- Loadings (λ) MPLUS = a (discrim) LTM
- Threshold (τ) MPLUS = b (difficulty) LTM

BILOG

ITEM	INTERCEPT	SLOPE	THRESHOLD	LOADING
ITEM01	1.527	0.994	-1.537	0.705
ITEM02	1.177	0.792	-1.486	0.621
ITEM03	0.983	1.510	-0.651	0.834
ITEM04	0.574	0.723	-0.794	0.586
ITEM05	0.349	1.008	-0.346	0.710

- Discrimination (a) MPLUS = a (slope) BILOG
- Difficulty (b) MPLUS = b (threshold) BILOG
- DI dalam BILOG nilai loading didapatkan dari rumus berikut :
$$\lambda_i = a / \sqrt{1 - a^2}$$

2.5 Penghubung Probit dengan ML/MLR dan MLF

Penghubung probit didasarkan pada persamaan ini :

$$probit(\pi) = \Phi(\pi)$$

Lambang π menunjukkan probabilitas yang akan diprediksi. Penghubung probit mentransformasikan nilai ini dalam nilai distribusi normal kumulatif.

Pada program MPLUS, probabilitas untuk masing-masing kategori adalah :

Kategori pertama :	$P_{ij}(f) = P(U_i = j f, X = x) = \Phi\left(\frac{\tau_{ij} - \lambda_i f - \beta_i x}{\sqrt{\theta_i}}\right)$
--------------------	--

Kategori terakhir :	$P_{ij}(f) = P(U_i = j f, X = x) = 1 - \Phi\left(\frac{\tau_{ij} - \lambda_i f - \beta_i x}{\sqrt{\theta_i}}\right)$
---------------------	--

Kategori di tengah :	$P_{ij}(f) = P(U_i = j f, X = x) = \Phi\left(\frac{\tau_{ij} - \lambda_i f - \beta_i x}{\sqrt{\theta_i}}\right) - \Phi\left(\frac{\tau_{ij-1} - \lambda_i f - \beta_i x}{\sqrt{\theta_i}}\right)$
----------------------	---

2.6 Penghubung Probit dengan WLS/ULS dengan Parameterisasi Theta

Dalam situasi ini model tidak memuat variabel laten kategorikal (C) namun menyertakan beberapa kelompok. Misalnya G menjelaskan kelompok variabel. Dengan parameterisasi Theta, parameter residual θ_{ik} merupakan parameter aktual di dalam model. Untuk model dasar, parameter ini nilainya ditetapkan sebesar 1 selama parameter ini tidak diidentifikasi atau tanpa dibatasi.

Untuk model yang melibatkan beberapa kelompok dan model mengenai pertumbuhan (growth model), parameter ini dapat diidentifikasi. Jika parameter ini tidak dicetak oleh MPLUS pada bagian hasil analisis, berarti nilai mereka ditetapkan sebesar 1. Kurva ICC diberikan sebagai berikut. Jika kategori j adalah kategori pertama, maka:

Kategori pertama :	$P_{ijk}(f) = P(U_i = j f, G = k, X = x) = \Phi\left(\frac{\tau_{ijk} - \lambda_{ik}f - \beta_{ik}x}{\sqrt{\theta_{ik}}}\right)$
Kategori terakhir :	$P_{ijk}(f) = P(U_i = j f, G = k, X = x) = 1 - \Phi\left(\frac{\tau_{ijk} - \lambda_{ik}f - \beta_{ik}x}{\sqrt{\theta_{ik}}}\right)$
Kategori di tengah :	$P_{ijk}(f) = P(U_i = j f, G = k, X = x) = \Phi\left(\frac{\tau_{ijk} - \lambda_{ik}f - \beta_{ik}x}{\sqrt{\theta_{ik}}}\right) - \Phi\left(\frac{\tau_{i1-jk} - \lambda_{ik}f - \beta_{ik}x}{\sqrt{\theta_{ik}}}\right)$

2.7 Penghubung Probit, Estimasi WLS/WLSM/WLSMV/ULS dan Parameterisasi Delta

Parameterisasi Delta. Faktor skala untuk variabel laten (yang sifatnya kontinu) dan variabel dependen (yang sifatnya kategorikal) diijinkan untuk menjadi parameter di dalam model, tetapi varians residual variabel laten tidak. Sebaliknya dalam

Parameterisasi Theta. Varians residual variabel respon laten diamati variabel dependen kategorikal diijinkan untuk menjadi parameter dalam model, tetapi faktor skala untuk variabel laten tidak. Hubungan antara theta dan delta dapat dilihat dari persamaan berikut:

$$\theta_i = \Delta_i^{-2} - Var(\lambda_i f)$$

Parameter Δ_i (delta) adalah parameter aktual yang dapat berbentuk bebas atau ditetapkan (*free or fixed*).

3 Kurva Informasi Aitem (IIC)

Penghitungan kurva informasi aitem (*item information curves*) untuk kategori U_i dan faktor laten f diawali dari persamaan berikut ini.

$$Q_{ij} = \sum_{r=1}^j P_{ir}$$

Y_{ij} adalah frekuensi sampel. Untuk menghitungnya MPLUS menggunakan distribusi posterior jika ada beberapa kelas di dalam model. Jika hanya ada satu kelas di dalam model maka nilai frekuensi ini didapatkan dari frekuensi teramati pada sampel.

Dengan menggunakan teknik estimasi maximum likelihood (ML/MLF/MLR) maka IIC didefinisikan dengan persamaan berikut.

$$I_i(f) = \lambda_i^2 \sum_{j=1}^{l-1} (x_{ij+1} - x_{ij-1}) Q_{ij} (1 - Q_{ij})$$

Simbol l menunjukkan jumlah kategori dan $x_{i0}=0$ dan $x_{il}=1$.

Jika menggunakan teknik estimasi terbobot (WLS/WLSM/WLSMV/ULS) dengan menggunakan penghubung probit, untuk parameterisasi theta dan delta, IIC di hitung dengan persamaan berikut.

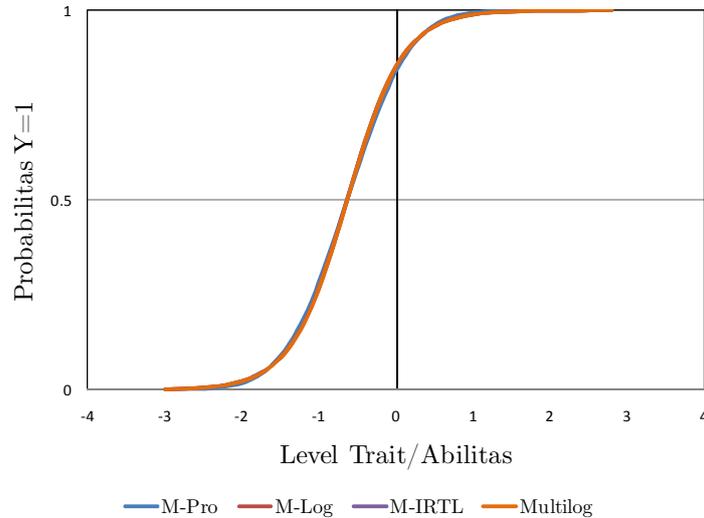
$$I_i(f) = \frac{\lambda_i^2}{\theta_i} \sum_{j=1}^{l-1} (x_{ij+1} - x_{ij-1}) Q_{ij} (1 - Q_{ij})$$

Informasi total (untuk tes) dihitung dengan menggunakan persamaan berikut.

$$I(f) = \sum_i I_i(f)$$

4 Perbandingan Antar Model

Hasil perbandingan hasil antara model logit dan probit pada MPLUS dan perbandingan dengan program lainnya yaitu MULTILOG menghasilkan bentuk kurva informasi yang sama.



5 Parameterisasi IRT

Untuk butir dikotomi dengan satu faktor tunggal MPLUS menggunakan parameterisasi IRT. Berikut ini persamaan yang dipakai dalam menerapkan prosedur ini.

$$f = \alpha + \sqrt{\psi}\theta$$

α adalah rerata faktor dan ψ adalah varians faktor, θ adalah variabel laten standar IRT dengan rerata sebesar 0 dan deviasi standar sebesar 1. Untuk prosedur estimasi ML dengan penghubung logit, maka parameterisasi dilakukan dengan persamaan berikut.

$$P(U_i = j | f) = \frac{1}{1 + \text{Exp}(-\tau_{ij} + \lambda_{ij}f)} = \frac{1}{1 + \text{Exp}(-Da_i(\theta - b_i))}$$

D adalah nilai konstan untuk IRT yang dekat dengan skala probit. a adalah daya diskriminasi butir dan b adalah tingkat kesulitan butir. Dengan menggunakan analisis faktor aitem maka parameter ini dihitung dengan persamaan berikut ini.

$$a_i = \frac{\lambda_i \sqrt{\psi}}{D} \qquad b_i = \frac{\tau_i - \lambda_i a}{\lambda_i \sqrt{\psi}}$$

Karena nilai akar ψ sama dengan 1 maka persamaan di kiri ini dapat disederhanakan menjadi

$$a_i = \frac{\lambda_i}{D} \qquad b_i = \frac{\tau_i}{\lambda_i}$$

Untuk teknik estimasi ML/MLF/MLR dengan menggunakan penghubung probit menggunakan persamaan di bawah ini.

$$a_i = \lambda_i \sqrt{\psi}$$

Untuk teknik estimasi WLS/WLSM/WLSMV/ULS dengan menggunakan penghubung probit menggunakan persamaan di bawah ini.

$$a_i = \frac{\lambda_i \sqrt{\psi}}{\sqrt{\theta_i}}$$

Sedangkan untuk teknik estimasi WLS/WLSM/WLSMV/ULS dengan menggunakan penghubung probit dan parameterisasi delta menggunakan persamaan di bawah ini.

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{\Delta_i^{-2} \lambda_i^{-2} \psi^{-1} - 1}}$$

6 Referensi

Statmodel. (2004). IRT in Mplus. <http://www.statmodel.com>

